16 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Etudier les variations de f.

3. Monter que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.

4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=x$.

b. Préciser les coordonnées des points d'intersection de C_f et $C_{f^{-1}}$.

5. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B/ 1. Montrer que $f([1,2])\subset[1,2]$.

2. Montrer que $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$, pour tout x de $[1,2]$.

3. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=1, \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $1\le u_n\le 2$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|\le\frac{2}{3}\left|u_n-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

17 1. Simplifier les nombres ci-dessous.

$x=\frac{\sqrt[3]{3}.\sqrt{27}.\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}}$; $y=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$; $t=\sqrt[3]{8^2}$.

2. Montrer que $\frac{\sqrt[3]{1024}.\sqrt{\sqrt{64}}.\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\sqrt{\sqrt[3]{256}}}=16$.

3. a. Développer $(2+\sqrt{5})^3$.

b. Simplifier $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

1. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2}$.
2. $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3}$.
3. $\sqrt[3]{x^2}-3^3\sqrt{x}+2=0$.
4. $\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3+8=0$.

19 Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x+1}$; $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{x^2+x}{\sin x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x}$;

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x^2+\sqrt[4]{x}$.

1. Etudier les variations de f.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f.

3. Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x\sqrt[3]{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

3. Etudier les variations de f.

4. Ecrire une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1. Tracer C.

5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On désigne par h la fonction réciproque de f.

b. Montrer que h est dérivable en 1 et calculer $h'(1)$.

c. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite $\Delta: y=x$ et de C.

d. Tracer la courbe de h.

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn